Moyano

PRIMER PARCIAL DE ANÁLISIS MATEMÁTICO II

APELLIDO Y NOMBRES:..D.N.I.:...........................

TEÓRICO 1	TEÓRICO 2	PRÁCT. 1	PRÁCT. 2	PRÁCT. 3	PRÁCT. 4	NOTA

TEÓRICO 1: a) Defina límite de una función (campo escalar en $\mathbb{R}^n$) en un punto ; b) Demuestre que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{4x^4-y^2}$

TEÓRICO 2: a) Defina diferenciabilidad de un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en un punto y b) Justifique la diferenciabilidad de $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$ en el punto (0,0) y obtenga la dirección de máxima variación de f en dicho punto

PRÁCTICO 1: Analizar la existencia de los límites en el origen de coordenadas , para las siguientes funciones: $i)\ f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\quad ii)\ h(x,y) = \frac{x^3+x.y^4}{x^2+y^4}$

PRÁCTICO 2: Encuentre la solución particular de $xy' - 4y = x^2.e^x$ que pasa por el (1,2)

PRÁCTICO 3: Encuentre un valor aproximado de $e^{0,1}.sen(0,3)$, mediante el polinomio de Taylor de orden 2, desarrollado en el origen de coordenadas, de $f(x,y) = e^{x-y}.sen(y)$

PRÁCTICO 4: Analice la existencia de extremos relativos de

$$f(x,y) = 6x + 6y + 2xy - 5x^2 - 2y^2$$

Prof. Martin Moyano

AM 2 UTN | 1° parcial (modelo de parcial.docx) | HOJA Nº 1/2 | FECHA

T1 a) Defina límite de una función (campo escalar en $\mathbb{R}^n$) en un punto.

Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y A un punto de acumulación de $\mathbb{R}^n$

Se dice que $f(\bar{x})$ tiende a L cuando x tiende a A

$$f(\bar{x}) \to L \iff \lim_{\bar{x} \to \bar{A}} f(\bar{x}) = L$$

b) Demuestre que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{4x^4-y^2}$ $f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{4x^4-y^2} \overset{x=0}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0^2+y}{4\cdot 0^4-y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{-y^2} \begin{cases} \to +\infty & \text{si } y<0 \\ \to -\infty & \text{si } y>0 \end{cases}$$

$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

T2 a) Defina diferenciabilidad de un campo escalar de $\mathbb{R}^2$ en un punto

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y (x_0,y_0) un punto interior de D.

f es diferenciable si:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) - \left(f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)h_1 + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)h_2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

b) Justifique la diferenciabilidad de $f(x,y) = 5-x^2-y^2$ en el punto (0,0) y obtenga la dirección de máxima variación de f en dicho punto.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - \overset{5}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5-h^2-5}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(0,h)) - \overset{5}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5-h^2-5}{h} = 0$$

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{f[(0,0)+\overset{(h_1,h_2)}{h_1,h_2}] - [\overset{5}{f(0,0)} + \overset{0}{f'_x(0,0)}\, x\, h_1 + \overset{0}{f'_y(0,0)}\, y\, h_2]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{f(h_1,h_2)-5}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\cancel{5}-h_1^2-h_2^2-\cancel{5}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{-(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\bar{h}\to 0} -\sqrt{\underbrace{h_1^2}_{\to 0} + \underbrace{h_2^2}_{\to 0}} = 0$$

NOTA

P1 Analizar la existencia de los límites en el origen de coordenadas para:

a)

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \begin{cases} \xrightarrow{y=0} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \xrightarrow{x=0} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \end{cases} \neq$$

$$\boxed{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}$$

b)

$$h(x,y) = \frac{x^3+xy^4}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^4}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\overbrace{x}^{\to 0}\,\overbrace{x^2}^{\text{acot}}}{x^2+y^4}}_{\to 0} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\overbrace{x}^{\to 0}\,\overbrace{y^4}^{\text{acot}}}{x^2+y^4}}_{\to 0} = 0$$

(*)

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \text{acotado entre } 0 \text{ y } 1$$

$$0 \leq \frac{y^4}{x^2+y^4} \leq \frac{y^4}{y^4} = 1 \Rightarrow \text{" " } 0 \text{ y } 1$$

NOTA

Prof. Martín Mayano

AM II UTN	1° parcial (modelo primer parcial.docx)	HOJA N° 2/2 FECHA

P2 Encuentre la solución particular de $xy' - 4y = x^2 e^x$ que pase por el $(1;2)$

Por la forma de la ecuación, voy a utilizar el método de Lagrange

$$y = u v \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$x\,y' - 4y = x^2 e^x$$

$$x(u'v + uv') - 4uv = x^2 e^x$$

$$xu'v + xuv' - 4uv = x^2 e^x$$

$$xu'v + u(xv' - 4v) = x^2 e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xv' - 4v = 0 & (1) \\ xu'v = x^2 e^x & (2) \end{cases}$$

(1) $xv' - 4v = 0 \Rightarrow xv' = 4v \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{4}{x} \xrightarrow{\text{int.}} \ln(v) = 4\ln(x) = \ln(x^4)$

$v = k x^4 \xrightarrow[\text{tomo}]{k=1} \boxed{v = x^4}$

(2) $xu'v = \cancel{x} u' x^{\cancel{4}3} = \cancel{x^2} e^x \Rightarrow u' = \frac{e^x}{x^3} \leftarrow \boxed{n=3}\ \boxed{a=1}$

tabla S15

$$u = \frac{-e^x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x^2}dx = \frac{-e^x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-e^x}{1x^1} + \frac{1}{1}\int \frac{e^x}{x}dx\right]$$

$\binom{a=1}{n=2}$

$$= \frac{-e^x}{2x^2} - \frac{e^x}{2x} + \frac{1}{2}\left[\cancel{\ln(x) + cx}\ Ei(x)\right] + C$$

$$y = uv \Rightarrow y = \left(\frac{-e^x}{2x^2} - \frac{e^x}{2x} + \frac{Ei}{2} + c\right)x^4 = \frac{-x^2e^x}{2} - \frac{x^3e^x}{2} + \frac{x^4 Ei}{2} + cx^4$$

$(1,2) \Rightarrow x=1 \quad y=2$

$$2 = \frac{-1^2 e^1}{2} - \frac{1^3 e^1}{2} + \frac{1^4 Ei(1)}{2} + c\,1^4$$

Si $u' = \frac{1}{x^3} \rightarrow u = -\frac{1}{2x^2} + c \rightarrow y = uv = x^4\left(\frac{1}{2x^2} + c\right)$

$$y = \frac{x^2}{2} + cx^4 \xrightarrow{(1,1)} 2 = \frac{1}{2} + c\,1 \rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^4}$$

NOTA

P3 Encuentre un valor aproximado de $e^{0,1}\,sen(0,3)$ mediante el polinomio de Taylor de orden 2, desarrollado en el origen de coord. de $f(x,y) = e^{x-y}\,sen(y)$

$y = 0,3$

$x = 0,4$

$f(0,0) = 0$

$f'_x(x,y) = e^{x-y}\,sen(y) \rightarrow f'_x(0,0) = 0$

$f'_y(x,y) = -e^{x-y}\,sen(y) + e^{x-y}\cos(y) \rightarrow f'_y(0,0) = 1$

$f''_{xx}(x,y) = e^{x-y}\,sen(y) \rightarrow f''_{xx}(0,0) = 0$

$f''_{xy}(x,y) = -e^{x-y}\,sen(y) + e^{x-y}\cos(y) \rightarrow f''_{xy}(0,0) = 1$

$f''_{yy}(x,y) = \cancel{e^{x-y}\,sen(y)} - e^{x-y}\cos(y) - e^{x-y}\cos(y) \cancel{- e^{x-y}\,sen(y)}$

$f''_{yy}(x,y) = -2e^{x-y}\cos(y) \rightarrow f''_{yy}(0,0) = -2$

$$P_2(x,y) = f(0,0) + f'_x\,x + f'_y\,y + \frac{1}{2}\left[f''_{xx}\,x^2 + 2f''_{xy}\,xy + f''_{yy}\,y^2\right] =$$

$$= 0 + 0x + 1y + \frac{1}{2}\left[0x^2 + 2 \cdot 1\,xy - 2y^2\right]$$

$$\boxed{P_2(x,y) = y + xy - y^2} \quad \boxed{P(0,4;\,0,3) = 0,33}$$

P4 Analice la existencia de extremos relativos de

$$f(x,y) = 6x + 6y + 2xy - 5x^2 - 2y^2$$

Hallo (x,y) tal que $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$

$$\begin{cases} f'_x = 6 + 2y - 10x = 0 \\ f'_y = 6 + 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cancel{6} + 2y - 10x = \cancel{6} + 2x - 4y \Rightarrow \underbrace{6y = 12x}_{y = 2x}$

$6 + 2x - 4y = 6 + 2x - 4(2x) = 0$

$6 + 2x - 8x = \underbrace{6 - 6x = 0}$

$x = 1 \Rightarrow y = 2$

$\boxed{PC = (1,2)}$

Criterio del hessiano

$$\left.\begin{array}{l} f''_{xx} = -10 \\ f''_{xy} = 2 \\ f''_{yy} = -4 \end{array}\right\} \quad Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow |H| = 36$$

$|H| > 0$ y $f''_{xx} < 0$

$f(1,2)$ es máximo local y toma valor 9